Ответы и решения задач «жёлтого» уровня сложности MathCat

1. (5 баллов) Код замка состоит из трёх цифр. Петя попытался его подобрать и попробовал комбинации 387, 582, 312. Оказалось, что в каждом варианте он верно набрал ровно одну цифру. Какой код у замка?

Ответ: 517.
Решение: Предположим, что первая цифра кода равна 3. Тогда во второй комбинации Петя мог верно набрать цифру 8 или 2. Но в любом из этих случаев либо первая, либо третья комбинация содержала бы не меньше двух совпадений с кодом, что противоречит условию. Аналогично доказывается, что вторая цифра кода не равна 8, а третья не равна 2. Следовательно, в первой комбинации Петя правильно набрал цифру 7, во второй – цифру 5, а в третьей – цифру 1, то есть замок имеет код 517.

2. (5 баллов) На семи карточках написаны числа 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13. Первый математик взял не глядя три карточки, а второй – две. Посмотрев на свои карточки, первый сказал второму: «Я знаю, что сумма чисел на твоих карточках чётна». Какие числа написаны на карточках первого математика?

Ответ: 8, 10, 12.
Решение: Среди чисел на карточках три чётных и четыре нечётных. При этом первый математик точно знал, что второму достались числа одной чётности. Следовательно, он забрал себе все карточки с числами другой чётности, то есть ему достались три карточки с чётными числами.

3. (7 баллов) За круглым столом сидят десять школьников. У всех разное количество пирожных. У каждой пары сидящих рядом количество пирожных отличается на 2 или на 3. На какое наибольшее число может отличаться количество пирожных у сидящих не рядом?

Ответ: 14.
Решение: Рассмотрим любых двух школьников *A* и *B*, сидящих не рядом. Они разбивают круг на две группы, в одной из которых не более четырёх человек. Добавив к этой группе школьников *A* и *B*, получим группу не более чем из шести человек, в которой разность между количеством пирожных у каждых двух соседей не превосходит 3. Значит, число пирожных у *A* и *B* не может отличаться более чем на $3 \cdot 5 = 15$. При этом 15 оно может быть равно только в случае, если между ними с каждой стороны сидит по четыре человека и у каждой пары соседей число пирожных отличается на 3. Но тогда у некоторых школьников поровну пирожных, что противоречит условию. Следовательно, разность не может быть равна 15. А вот 14 может, – например, если количества пирожных у школьников равны (при обходе по кругу) 0, 3, 6, 9, 12, 14, 11, 8, 5, 2.

4. (9 баллов) На плоскости даны 20 прямых, среди которых нет параллельных. Ровно шесть из них пересекаются в точке A, ровно пять – в точке B, ровно четыре – в точке C, а остальные прямые пересекаются только по две. Сколько всего точек пересечения у этих прямых?

Ответ: 162.

Решение: Если бы прямые пересекались только по две, то было бы 20·19:2 = 190 точек пересечения. Однако в точке A пересекается 6·5:2 = 15 пар прямых, в точке B – 5·4:2 = 10 пар, в точке C – 4·3:2 = 6 пар. Из-за этого количество точек пересечения становится меньше на 14 + 9 + 5 = 28, поэтому оно оказывается равным 190 − 28 = 162.

5. (10 баллов) В помещении три комнаты, в первой и второй комнатах находится по 12 человек и сколько-то человек в третьей комнате. После того как один человек перешёл из первой комнаты во вторую, один человек – из второй в третью, и один человек – из третьей в первую, средний возраст людей в первой комнате уменьшился на 1 год, во второй – уменьшился на 2 года, а в третьей – увеличился на 4 года. Сколько людей в третьей комнате?

Ответ: 9.

Решение: После переходов количество людей в каждой комнате осталось прежним. При этом средний возраст людей в первой комнате уменьшился на 1 год, поэтому их суммарный возраст уменьшился на 12 лет. Аналогично, суммарный возраст людей во второй комнате уменьшился на 24 года. Так как общий возраст людей во всех трёх комнатах не изменился, то в третьей комнате сумма возрастов увеличилась на 12 + 24 = 36 лет. По условию средний возраст в этой комнате увеличился на 4 года, а это означает, что там 36:4 = 9 человек.

6. (11 баллов) В записи шестизначного числа есть все цифры от 1 до 6. При этом число, образованное первыми двумя цифрами этого числа, кратно 2, первыми тремя – кратно 3, первыми четырьмя – кратно 4, первыми пятью – кратно 5, всё число кратно 6. Найдите все такие числа.

Ответ: 123654 и 321654.

Решение: Понятно, что на пятом месте в искомом числе стоит цифра 5, чётные цифры стоят на чётных местах, а нечётные – на нечётных. Значит, на первом и третьем местах стоят цифры 1 и 3 в некотором порядке. Чтобы число из первых трёх цифр делилось на 3, вторая цифра должна давать при делении на 3 остаток 2, поэтому там может быть только цифра 2. На четвёртом месте должна стоять цифра 6, поскольку число, оканчивающееся на 4 и кратное 4, не может иметь нечётную предпоследнюю цифру. Следовательно, цифра 4 может быть только на последнем месте, откуда получаем два варианта, указанных в ответе. Легко проверить, что оба они удовлетворяют условию.

7. (11 баллов) У Деда Мороза есть 100 подарков – конфеты, шоколадки и мандарины. Количество конфет больше, чем удвоенное количество шоколадок; утроенное количество шоколадок больше, чем учетверённое количество мандаринов; утроенное количество мандаринов больше количества конфет. Сколько подарков каждого вида у

Деда Мороза? В ответе перечислите через запятую количество конфет, шоколадок и мандаринов.

Ответ: 55, 26, 19.

Решение: Предположим, что количество мандаринов не превосходит 18. Тогда из третьего условия получаем, что конфет не больше 53, а после этого из первого условия – что шоколадок не больше 26. В этом случае у Деда Мороза всего не более 97 подарков, и мы приходим к противоречию. Если же мандаринов не меньше 20, то шоколадок не меньше 27 из второго условия, а конфет не меньше 55 из первого условия, и снова получаем противоречие. Таким образом, количество мандаринов равно 19. Тогда из второго условия следует, что шоколадок не меньше 26. Если их хотя бы 27, то конфет не меньше 55 из первого условия, а это опять противоречит тому, что общее число подарков равно 100. Значит, у Деда Мороза 26 шоколадок и $100 - 19 - 26 = 55$ конфет.

8. (13 баллов) Вася расставил вдоль окружности цифры 3 и 7, при этом семёрок вдвое больше, чем троек. Затем, обходя окружность по часовой стрелке, Вася выписал на листок все двузначные числа из соседних цифр. Оказалось, что составных чисел он выписал втрое больше, чем простых. Чему равна наименьшая возможная сумма расставленных Васей на окружности цифр?

Ответ: 136.

Решение: Так как семёрок вдвое больше, чем троек, то общее количество цифр на окружности кратно 3. Они разбиваются на группы подряд идущих одинаковых цифр. Двузначное число, стоящее на стыке двух групп, равно 37 или 73, то есть в любом случае простое, а целиком попадающее в одну группу – составное, поскольку равно 33 или 77. При обходе окружности по часовой стрелке переходов от групп с тройками к группам семёрок столько же, сколько и от семёрок к тройкам. Значит, простых чисел Вася выписал чётное количество, а составных при этом в 3 раза больше, поэтому общее количество выписанных чисел делится на 8. Но двузначных чисел столько же, сколько и цифр, поэтому количество цифр тоже кратно 8. Следовательно, цифр на окружности не меньше 24, из них троек не меньше восьми, а семёрок – не меньше 16. Пример с 24 цифрами легко строится: 3 7 3 7 3 3 3 3 3 3 7 7 7 7 7 7 7 7 7 7 7 7 7 7, сумма цифр при этом равна $3\cdot 8 + 7\cdot 16 = 136$.

9. (14 баллов) В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ биссектрисы углов A и B пересекаются в середине стороны CD, а угол C равен 68°. Чему может быть равен угол D?

Ответ: 68° или 112°.

Решение: Обозначим середину стороны CD через M. Так как точка M лежит на биссектрисе угла A, то она равноудалена от прямых AB и AD. Аналогично она равноудалена от прямых BA и BC. Поэтому если из M опустить перпендикуляры MK и ML на прямые AD и BC соответственно, то их длины равны. Тогда прямоугольные треугольники MKD и MLC равны по катету и гипотенузе. Следовательно, равны и их углы MDK и MCL, а это означает, что $\angle ADC$ четырёхугольника $ABCD$ равен либо углу C, либо смежному с ним (в зависимости от того, куда попало каждое из оснований перпендикуляров *MK* и *ML* – на стороны четырёхугольника *ABCD* или на их продолжения).

10. (15 баллов) В марафонском забеге участникам были выданы стартовые номера – последовательные натуральные числа, начиная с 1. По итогам забега оказалось, что у каждого участника сумма стартового номера и занятого им места равна либо 19, либо 20, либо 21, причём все эти три суммы присутствовали (никакие два участника не делили одно и то же место). Сколько участников могло быть в забеге?

Ответ: 19.
Решение: Если участников не более 17, то участник с номером 1 имел бы сумму стартового номера и занятого места меньше 19, что противоречит условию. Аналогично приходим к противоречию в случае, если участников более 20, рассмотрев участника с наибольшим стартовым номером (у него сумма будет больше 21).
Если участников 18, то участник с номером 1 мог занять только 18-е место и имел бы сумму 19. Тогда участник с номером 2 мог занять только 17-е место (18-е уже занято) и его сумма тоже была бы равна 19. Продолжая эти рассуждения, получим, что у всех участников сумма могла равняться только 19, хотя по условию встретились все три суммы 19, 20 и 21. Аналогично рассматривается случай, когда участников 20 – тогда у всех была бы сумма 21.
Таким образом, в забеге могло участвовать только 19 спортсменов. Такое возможно, если, например, участник с номером 1 занял 18-е место, участник с номером 2 – 19-е место, а остальные участники расположились так, что чем больше стартовый номер, тем выше занятое место (то есть у участника с номером 3 – 17-е место, с номером 4 – 16-е место, …, с номером 19 – 1-е место). Тогда у участника с номером 1 сумма равна 19, с номером 2 – сумма 21, а у всех остальных – по 20.